Nachklausurtutorium Theoretische Informatik

Karl Jochen Micheel & Christopher Happe

Sommersemester 2019

Überblick

1. Grundlagen
2. Reguläre Sprachen
3. Kontextfreie Sprachen
4. Kontextsensitive und L0 Sprachen
5. Berechenbarkeit
6. Primitive und Partielle Rekursion

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

- **Wird nur benutzt, um nachzuweisen, dass eine Sprache NICHT kontextfrei ist und FÜR NICHTS ANDERES!**

Beweis der nicht-Kontextfreieheit mithilfe des Pumping-Lemmas

- Angenommen $L \in CF$: Dann $\exists\, n \geq 1 : \forall\, z \in L$ mit $|z| \geq n$:
- *z lässt sich zerlegen in z = uvwxy mit:*
- 1. $|vx| \geq 1$,
- 2. $|vwx| \leq n$,
- 3. $(\forall i \geq 0)[uv^iwx^iy \in L]$
- Finde ein z, für das 1. und 2. aber nicht 3. gilt.

Beispiele des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

- $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$
- $L_2 = \{a^x \mid x = 2^n, n \geq 1\}$
- Aufgabe: $L_3 = \{0^m 1 2^m 1 3^m \mid m \geq 1\}$
- Aufgabe: $L_4 = \{a^x \mid x \text{ ist Quadratzahl}\}$

Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

- CF ist abgeschlossen unter:
- Vereinigung
- Konkatenation
- Iteration
- Spiegelung
- Sonderfall: Der Schnitt einer kontextfreien und einer regulären Sprache ist kontextfrei

Kellerautomaten: PDAs

- Erweiterung des NFA-Modells zu 6-Tupel $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \#)$ mithilfe eines Kellerspeichers
- Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$
- Kelleralphabet $\Gamma = \{A, B, \#\}$
- Zustandsmenge $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$
- Überführungsfunktion δ an der Tafel
- Startzustand $z_0 \in Z$
- Bottom-Symbol $\# \in \Gamma$

Arbeitsweise eines PDAs

- Ableiten des Wortes $w_1 = aabb$ und $w_2 = aab$ (an der Tafel)
- Ein PDA akzeptiert ein Wort durch einen leeren Keller, nicht durch Endzustände
- Übergänge ohne Lesen eines Eingabesymbols sind möglich: z.B.: $z\lambda A \rightarrow z'B$. Deshalb wird auch nur ein Startzustand benötigt, trotz nicht-determinismus
- PDAs akzeptieren, wenn mind. eine Konfigurationenfolge zur Endkonfiguration (z, λ, λ) führt, mit $z \in Z$

PDA zu gegebener CF-Grammatik

- Gegeben: CF-Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$
- Konstruiere PDA $M = (\Sigma, N \cup \Sigma, \{z\}, \delta, z, S)$
- Ist $A \rightarrow q$ eine Regel in P mit $A \in N$ und $q \in (N \cup \Sigma)^*$, so sei $(z, q) \in \delta(z, \lambda, A)$
- *Für jedes* $a \in \Sigma$ *sei* $(z, \lambda) \in \delta(z, a, a)$
- Beispiel an der Tafel

CF-Grammatik zu gegebenem PDA

- Gegeben sei ein PDA $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \#)$
- Konstruiere CF-Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$
- Falls es δ-Regeln $zaA \rightarrow z'B_1B_2 \ . \ . \ B_k$ *mit* $k > 2$ gibt, ersetze diese Regel durch
- $zaA \rightarrow z_1B_{k-1}B_k$, $z_1\lambda B_{k-1} \rightarrow z_2B_{k-2}B_{k-1}$, .. , $z'\lambda B_2 \rightarrow z'B_1B_2$

CF-Grammatik zu gegebenem PDA

- $N = \{S\} \cup Z \times \Gamma \times Z$
- P besteht aus folgenden Regeln:
  1. $S \rightarrow (z_0, \#, z)$ für jedes $z \in Z$
  2. $(z, A, z') \rightarrow a$, falls $(z', \lambda) \in \delta(z, a, A)$
  3. $(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z')$, falls $(z_1, B) \in \delta(z, a, A)$
  4. $(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z')$, falls $(z_1, BC) \in \delta(z, a, A)$
- Mit $z, z', z_1, z_2 \in Z$; $A, B, C \in \Gamma$ und $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$

CF-Grammatik zu gegebenem PDA

- Beispiel an der Tafel

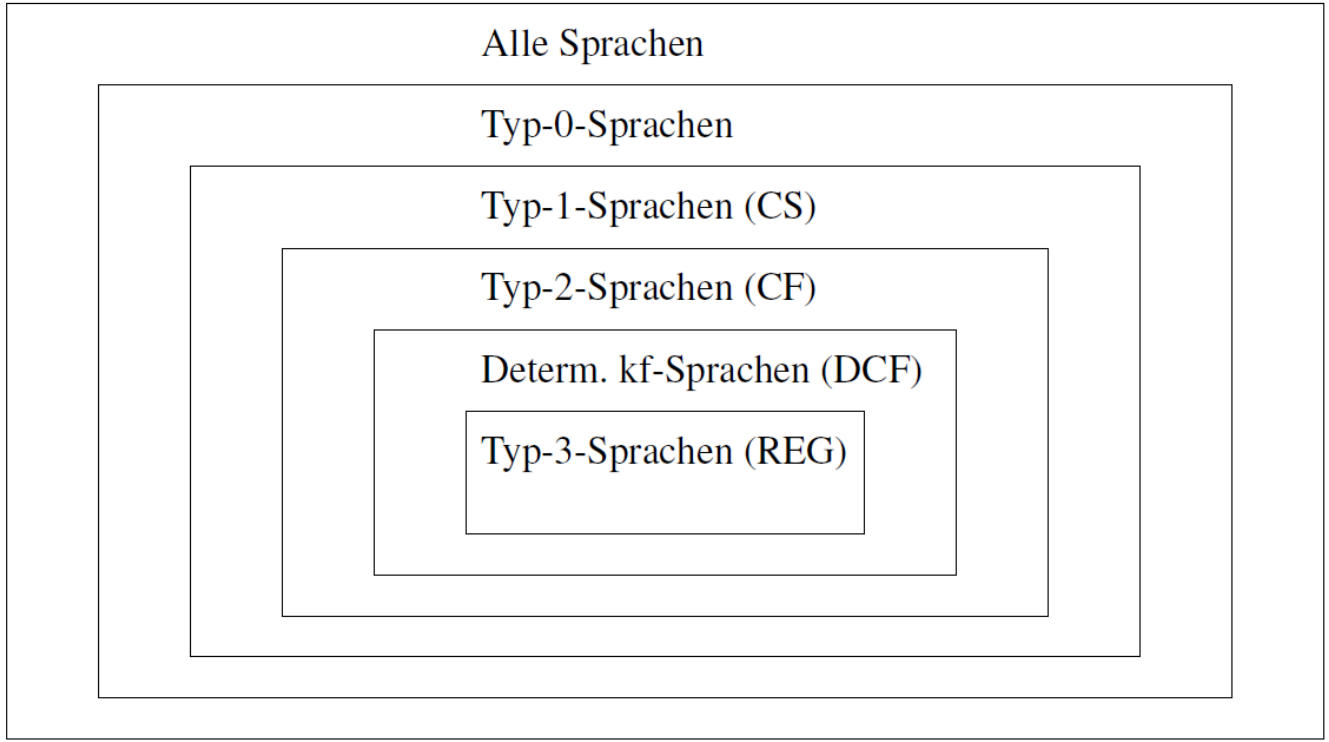
Deterministische Kellerautomaten: DPDAs

- Septupel $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \#, F)$ mit:
  - $M' = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \#)$ ist ein PDA
  - Bei jeder Konfiguration gibt es maximal eine Folgekonfiguration
  - $F \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände
- Beispiel an der Tafel

Unterschiede PDA und DPDA

- Wörter akzeptieren:
  - Ein PDA akzeptiert, falls eine Konfigurationenfolge zur Endkonfiguration (z, λ, λ) führt, also per leerem Keller
  - Ein DPDA hat immer nur eine Konfigurationenfolge für ein Wort und akzeptiert es, falls diese nach vollständiger Verarbeitung in einem Endzustand ist. Der Keller muss hierbei nicht leer sein.
- Wichtig REG $\subset$ DCF $\subset$ CF. Also sind PDAs und DPDAs nicht äquivalent!

Chomsky-Hierarchie



Fragen?